COLEGIO INTERNACIONAL SEK-CR

SOLUCIONARIO SIMULACRO 01-2016

⋆ Por: Prof. Álvaro Elizondo Montoya.⋆

1. (C) La ecuación de una circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r es: $\boxed{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2}$ luego:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 &= 4^2 \end{aligned}$$

Representa la ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4

2. (D) Un punto (x_1, y_1) es un punto exterior a un círculo de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r si satisface: $\boxed{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0) > r^2}$

$$(-2-0)^2 + (3-0)^2 = 4 + 9 = 13 < 16 \text{ luego } (-2, 3) \text{ es un punto interior.}$$
$$(1-0)^2 + (-5-0)^2 = 1 + 25 = 26 > 16 \text{ luego } (1, -5) \text{ es un punto exterior.}$$

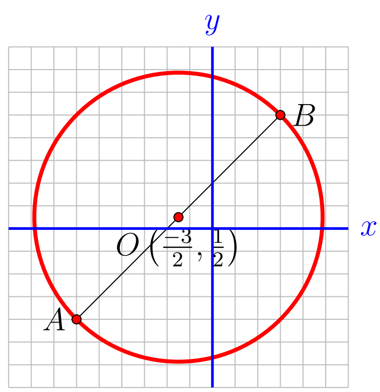
3. (B) Usaremos la ecuación del punto medio, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos, entonces el punto medio (x_m, y_m) se determina por:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Luego:

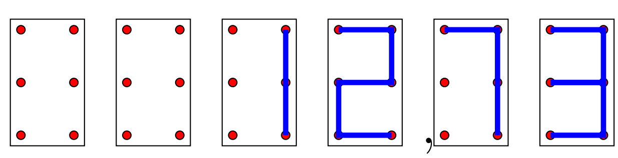
$$\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-6 + x_2}{2}, \frac{-4 + y_2}{2}\right)$$

Por observación: $x_1 = 3$ y $y_2 = 5$, luego $B(3, 5)$
Gráficamente:

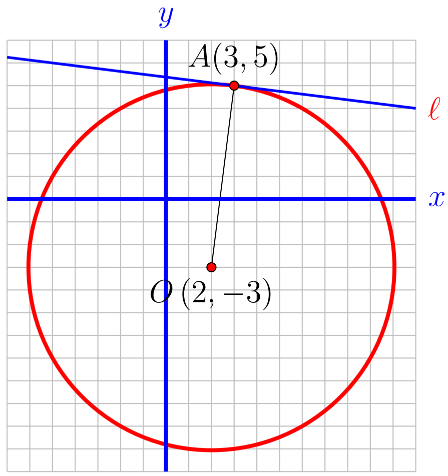


4. Basta utilizar la fórmula de la distancia:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - -6)^2 + (5 - -4)^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = \sqrt{162} \approx 12,73$$

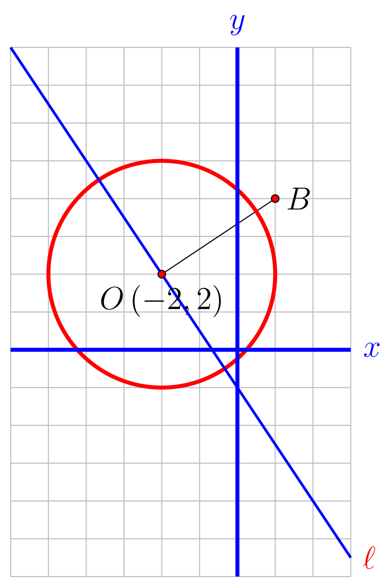
Respuesta: 

5. (A) Gráficamente, lo que se busca es la ecuación de la recta ℓ.



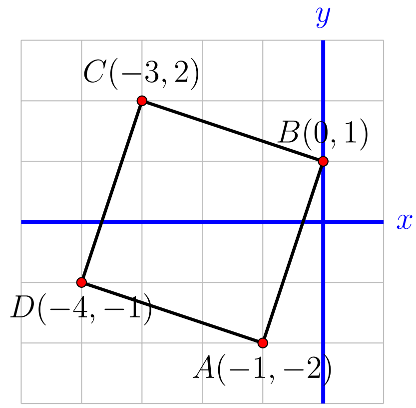
La pendiente del radio AO es: $m_{AO} = \dfrac{5 - -3}{3-2} = 8 \Rightarrow m_\ell = \dfrac{-1}{8}$, luego, el valor de corte con el eje y es $b = y_1 - m_\ell x_1 = 5 - \dfrac{-1}{8} \cdot 3 = \dfrac{43}{8}$. Por lo tanto: $\ell : y = \dfrac{-1}{8}x + \dfrac{43}{8} = \dfrac{-x+43}{8}$

6. (C)



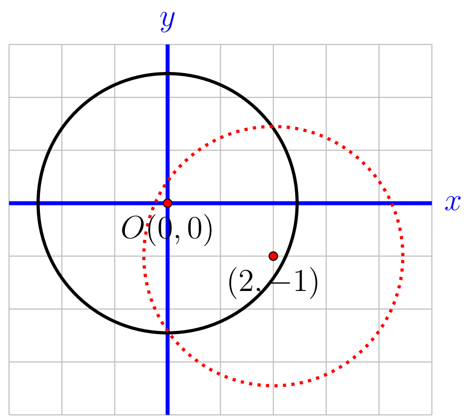
La pendiente del segmento BO es: $m_{BO} = \dfrac{4-2}{1 - -2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow m_\ell = \dfrac{-3}{2}$, luego, el valor de corte con el eje y es $b = y_1 - m_\ell x_1 = 2 - \dfrac{-3}{2} \cdot -2 = -1$. Por lo tanto: $\ell : y = \dfrac{-3}{2}x - 1 = \dfrac{-3x-2}{2}$

7. $(A, B\ y\ D)$ Ubiquemos los puntos dados en el plano y tracemos los segmentos AB, BC, CD y DA.



Claramente, la figura resulta ser un cuadrado, que a su vez es rectángulo y además rombo.

8. (B) Representando la situación:

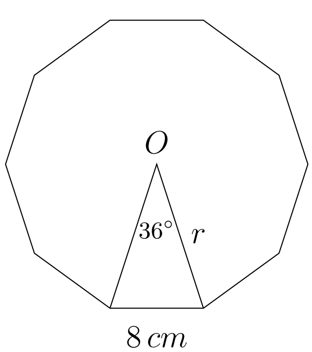


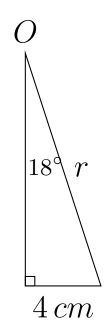
Claramente, la ecuación del nuevo círculo será: $(x-2)^2+(y+1)^2=6$

9. (C) Para determinar el número de lados, basta resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} D &= 35 \\ \frac{n(n-3)}{2} &= 35 \\ n(n-3) &= 70 \\ n(n-3) &= 10 \cdot 7 \end{aligned}$$

Claramente $n = 10$, se trata de un decágono regular. Representemos la figura:





$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(18°) &= \frac{4\,cm}{r} \\ r &= \frac{4}{\operatorname{sen}(18°)} \approx 12,94 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} A &= \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}(\angle C) \\ &\approx \frac{10}{2} \cdot (12{,}94)^2 \cdot \operatorname{sen}(36°) \approx 492{,}10 \end{aligned}$$

10. (A)

   a) El área requerida para el papalote es de: $A = (0{,}75\,m)^2 = 0{,}5625\,m^2$, luego con un metro cuadrado de tela puede construir el papalote.

   b) El perímetro del papalote es de: $p = 4 \cdot \ell = 4 \cdot 0{,}75\,m = 3\,m$

11. (A) Calculemos el área del polígono:

	2	12	
24	2	14	28
280	20	14	28
280	20	2	40
2	1	10.95	219
+ 21,9	2	12	12 +
607,9			327

   Luego $A = \frac{1}{2}(\text{Suma mayor} - \text{Suma menor}) = \frac{1}{2}(607{,}9 - 327) = \frac{1}{2} \cdot 280{,}9 = 140{,}45\,u^2$.
   El valor de la construcción será de: $C = 140{,}45 \cdot \$700 = \$98315$

12. a) $AB = 20 - 2 = 18\,m$

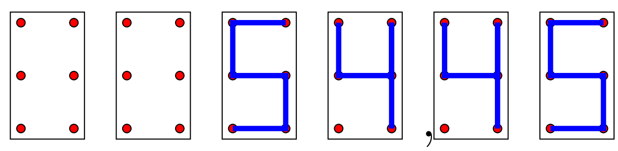
   b) $BC = 14 - 2 = 12\,m$

   c) $CD = \sqrt{(20-1)^2 + (2 - 10{,}95)^2} \approx 21\,m$

   d) $DE = \sqrt{(2-1)^2 + (12 - 10{,}95)^2} = 1{,}45\,m$

   e) $EA = 14 - 12 = 2\,m$

   Luego el perímetro es: $p \approx 18 + 12 + 21 + 1{,}45 + 2 \approx 54{,}45\,m$

   Respuesta: 

13. (A) Del área del rectángulo:

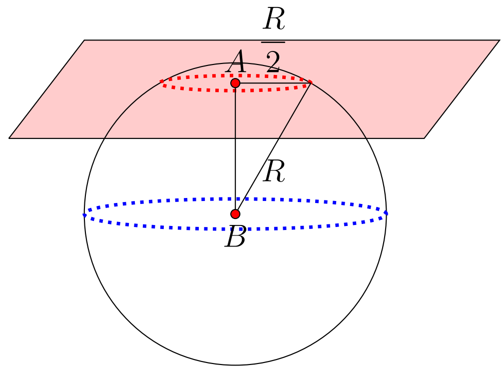
$$\begin{aligned} A_{RPZQ} &= RP \cdot RQ \\ \Rightarrow \ 80 &= RP \cdot 10 \\ \Rightarrow RP &= 8 \end{aligned}$$

   Luego:

$$\begin{aligned} A_L &= RP \cdot \pi \cdot RQ \\ &= 8 \cdot \pi \cdot 10 \\ &= 80\pi \end{aligned}$$

14. (D) Diámetro.

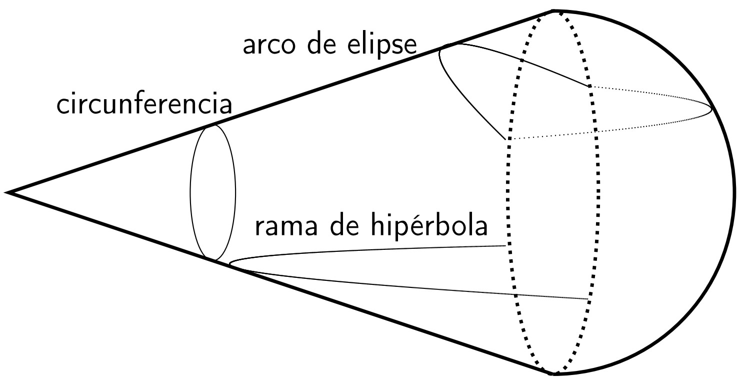
15. (A) Representemos las condiciones del problema:



La distancia AB es:

$$AB = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

16. (A) Observe los cortes hechos en la figura:



La sección de color rojo corresponde a una circunferencia, pues el corte se ha hecho perpendicular al eje del cono.

17. (D) Es claro que:

   a) El punto D es el homólogo del punto I respecto a la recta ℓ.
   b) El punto E es el homólogo del punto J respecto a la recta ℓ.

18. (D) Dado que la recta $y = x$ es la ecuación de la recta que corresponde a la función identidad, entonces la reflexión del punto $(-2, -8)$ será el punto $(-8, -2)$.

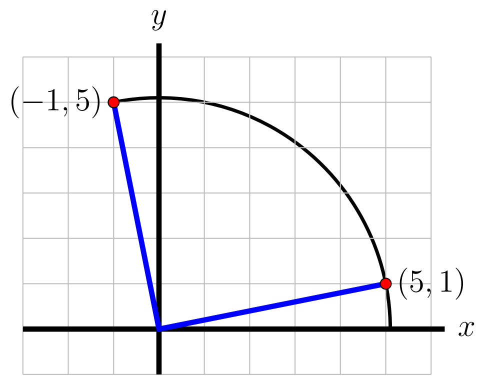
19. (C) Basta aplicar:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\theta) + y_0 \operatorname{sen}(\theta) \\ -x_0 \operatorname{sen}(\theta) + y_0 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

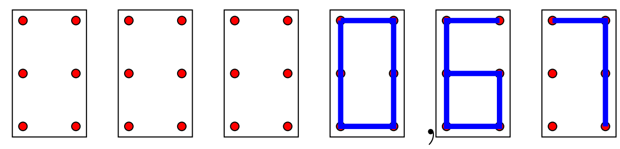
Luego:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cos(90°) + 5 \operatorname{sen}(90°) \\ 1 \operatorname{sen}(90°) + 5 \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gráficamente, se observa lo siguiente:



20. (B) Para obtener B de C, se debe multiplicar por un factor menor que uno puesto que la figura se reduce, dicho valor es: $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$

Respuesta: 

21. (A) Es claro que:

   a) El conjunto de los números enteros es igual a la unión del conjunto de los enteros pares con el conjunto de los enteros impares.

   b) No hay ningún número que sea entero par e impar a la vez.

22. (D) I. es falsa pues 5 no es un entero par. II es verdadera pues -19 es un entero impar.

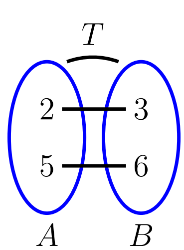
23. (A) $]-7,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : -7 < x\}$

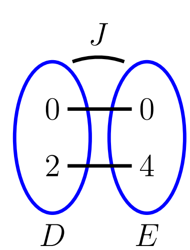
24. (B) $B^C = \mathbb{R} - B =]-\infty,+\infty[-]-\infty, 7[= [7,+\infty[$.
B^C se refiere al conjunto de números reales que no están en B.

25. (A) $M^C = \mathbb{Z} - Z^- = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$.
M^C se refiere al conjunto de números enteros que no están en M.

26. (B) Para resolver esto basta aplicar el "criterio de la línea vertical".
Criterio de la línea vertical: Una recta vertical trazada en cualquier parte de una gráfica de una función solo debe intersecar los puntos de la gráfica una sola vez.

27. (C) Consideremos los siguientes diagramas de Venn-Euler:





Note que J aplica el 2 en 4 y no en 6.

28. (C) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x + 7) = 2(4x + 7) - 3 = 8x + 14 - 3 = 8x + 11$

29. (B) Es claro que la preimagen de 2 es $\frac{1}{2}$.

30. (C)

I Falso: El que los promedios de consumo anual por abonado sean iguales no necesariamente significa que los consumos fuesen iguales en 1990 y em el 2010.

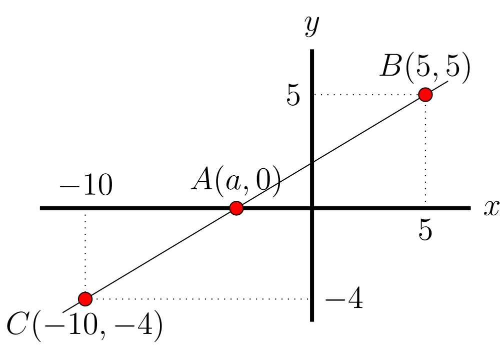
Veamos un ejemplo para explicar esto mejor, supongamos que en 1990 había 4 abonados que consumieron $10\,kW/h$ cada uno, luego el promedio por abonado es de $10\,kW/h$, esto para un consumo total de $4 \times 10\,kW/h \times 8760\,h = 350\,400\,kW$, para el 2010 suponga que había 5 abonados que consumieron $10\,kW/h$ cada uno, luego el promedio por abonado es de $10\,kW/h$, esto para un consumo total de $5 \times 10\,kW/h \times 8760\,h = 438\,000\,kW$

II Verdadero: De la gráfica se puede observar como desciende el consumo promedio anual por abonado.

III Falsa: Dado que el consumo promedio anual por abonado alcanza un máximo de $2850\,kW/h$, esto no necesariamente implica que el consumo máximo en una vivienda sea de $2850\,kW/h$.

Otro ejemplo para explicar esto mejor, supongamos que en 2005 había 2 abonados que consumieron, uno $2851\,kW/h$ y el otro $2849\,kW/h$, luego el promedio por abonado es de $2850\,kW/h$, así, el máximo consumo de electricidad presentado en una vivienda fue (en promedio anual) de $2851\,kW/h$.

31. (D) Consideremos que las coordenadas del punto A son $(a, 0)$



$$\begin{aligned}
m_{AB} &= m_{BC} \\
\frac{5-0}{5-a} &= \frac{5--4}{5--10} \\
\frac{5}{5-a} &= \frac{9}{15} \\
15 \cdot 5 &= 9(5-a) \\
75 &= 45 - 9a \\
\frac{30}{-9} &= a \\
\frac{-10}{3} &= a
\end{aligned}$$

32. Basta resolver:

$$\begin{aligned}
52x - 120 &= 3000 \\
52x &= 3120 \\
x &= \frac{3120}{52} \\
x &= 60
\end{aligned}$$

Respuesta: 60,00

33. (D)

a) El ámbito es: $A_f = \left[\dfrac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[= \left[\dfrac{-((-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8)}{4\cdot 1}, +\infty\right[= [-1, +\infty[$

b) La gráfica de g es cóncava hacia arriba pues $a = 3 > 0$

34. (A) Ecuación del eje de simetría: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2\cdot 1} = 3$

35. (B) La gráfica de f es creciente en $\left[\dfrac{-4+2}{2}, +\infty\right[= [-1, +\infty[$, en particular como se sabe que $[-1, 6] \subset [-1, +\infty[$, se puede afirmar que $\boxed{\text{un}}$ intervalo en el que f es creciente es: $[-1, 6]$

36. (D) Supongamos que cada cuaderno cosido vale "x" y cada cuaderno de resortes vale "y", entonces, basta resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 4x+4y & = & 14500 & (1) \\ 3x+5y & = & 12000 & (2) \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcll} x+y & = & 3625 & (3) \\ 3x+5y & = & 12000 & (2) \end{array}\right.$$

La ecuación (3) se obtiene dividiendo entre 4 cada miembro de la ecuación (1), luego si de la ecuación (3) despejamos la variable y se tiene: $y = 3625 - x$, realizando la sustitución en la ecuación (2) se tiene:

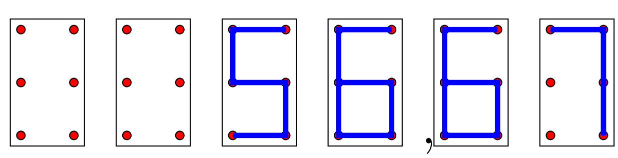
$$\begin{array}{rcl} 3x + 5(3625 - x) & = & 12000 \\ 3x + 18125 - 5x & = & 12000 \\ 18125 - 12000 & = & 5x - 3x \\ 6125 & = & 2x \\ 3062{,}5 & = & x \end{array}$$

37. (B) Suponga que el grupo A tiene x estudiantes, luego el grupo B tiene $42 - x$ estudiantes, luego según la instrucción, se tiene que:

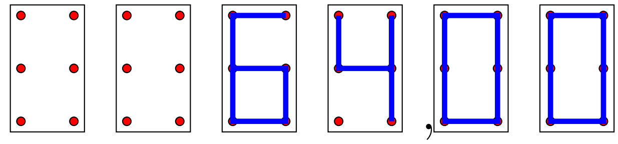
$$\begin{array}{rcl} 4x + 2(42 - x) & = & 128 \\ 4x + 84 - 2x & = & 128 \\ 2x + 84 & = & 128 \\ 2x & = & 44 \\ x & = & 22 \end{array}$$

Luego el grupo A tiene 22 estudiantes y el B 20 estudiantes.

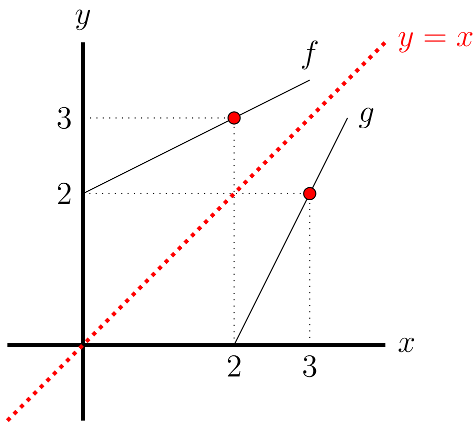
38. Por cada incremento de 10 grados de la temperatura hay un incremento de 15 minutos en la medición, luego la pendiente de la recta es $\frac{10}{15}$ o $\frac{2}{3}$, la forma de la relación es: $T(t) = \frac{2}{3}t + T_0$, usando que $T(15) = 20$ entonces $\frac{2}{3}\cdot 15 + T_0 = 20 \Rightarrow T_0 = 10$.
Así $T(70) = \frac{2}{3}\cdot 70 + 10 \approx 56{,}67$

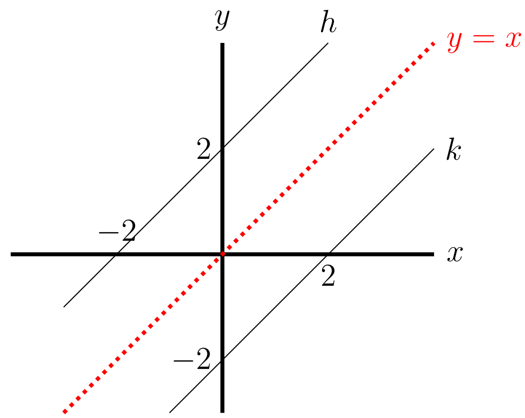
Respuesta: 

39. Para determinar el incremento de la población, se debe calcular: $f(4) - f(0)$ es decir $174 - 110$, el aumento fue de 64 sapitos.

Respuesta: 

40. (A) Es claro que ambas gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$



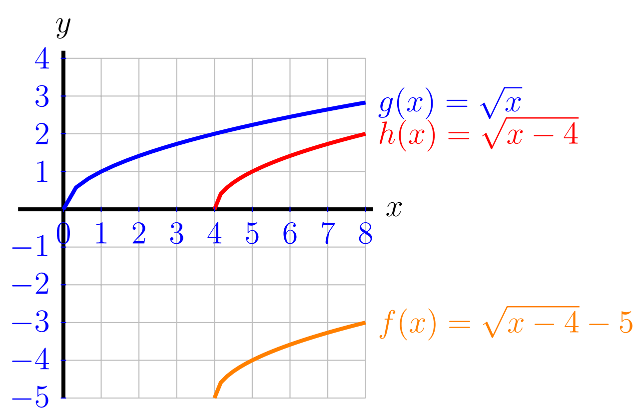


41. (A) Resolvamos:

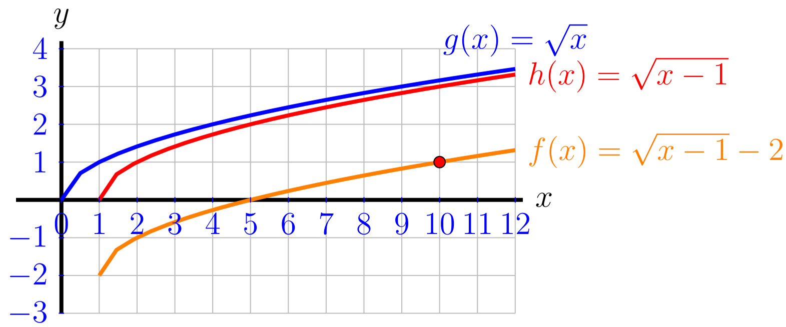
$$\begin{aligned}
\frac{-2}{3}x + \frac{1}{3} &= 0 \\
\frac{1}{3} &= \frac{2}{3}x \\
1 &= 2x \\
\frac{1}{2} &= x
\end{aligned}$$

Si hallamos el valor de corte con el eje x de f, estamos hallando el valor de corte de f^{-1} con el eje y.

42. $(*)$ Observe las gráficas:



43. $(*)$ Observe las gráficas:



44. (A) Hallemos la cantidad inicial:

$$\begin{aligned} Q(0) &= 42 \cdot 2^{-0{,}017 \cdot 0} \\ Q(0) &= 42\, g \end{aligned}$$

Luego, el valor en la semivida o vida media será de $21\, g$, por ello resolvamos:

$$\begin{aligned} 21 &= 42 \cdot 2^{-0{,}017 \cdot t} \\ \frac{21}{42} &= 2^{-0{,}017 \cdot t} \\ \frac{1}{2} &= 2^{-0{,}017 \cdot t} \\ 2^{-1} &= 2^{-0{,}017 \cdot t} \\ -1 &= -0{,}017 \cdot t \\ \frac{-1}{-0{,}017} &= t \\ 58,8235 \text{ años} &\approx t \end{aligned}$$

Multiplicando la parte decimal por 12 se obtiene: $0,8235 \times 12 = 9{,}882$, de nuevo multiplicando la parte decimal por 30 se obtiene: $0{,}882 \times 30 = 26{,}46$, es decir son 58 años 9 meses y 26 días. [1]

45. (B) Sabemos que:

$$t(T) = \frac{-1}{2} ln \left(\frac{T}{75} \right)$$

Luego resolvamos:

$$\begin{aligned} 0{,}25 &= \frac{-1}{2} ln \left(\frac{T}{75} \right) \\ -{,}5 &= ln \left(\frac{T}{75} \right) \\ e^{-0{,}5} &= \frac{T}{75} \\ 75e^{-0{,}5} &= T \\ 45{,}49 &\approx T \end{aligned}$$

Esto significa que si la temperatura de un objeto es de $45{,}49$ grados celsius, luego de $0{,}25$ horas habrá alcanzado el equilibrio térmico.

[1] Un modelo matemático tan simple como el dado, difícilmente tenga posibilidad de acertar con precisión de días luego de casi 60 años.

46. (C) El primer cuartil Q_1 es aquél valor en el que se obtiene el percentil 25, dado que $P_m = \frac{m}{100}n$ término, entonces: $Q_1 = P_{25} = \frac{25}{100} \cdot 25 = 6{,}25$ de los términos comenzando por los datos menores. Nótese que:

$$\begin{aligned} 2+4 < \quad 6{,}25 \quad &< 2+4+4 \\ 6 < \quad 6{,}25 \quad &< 10 \end{aligned}$$

Luego el primer cuartil se halla entre 27 y 30, para saber exactamente, se resuelve por medio de interpolación lineal:

$$Q_1 = 27 + \frac{30-27}{7-6} \cdot (6{,}25 - 6) = 27{,}75$$

También se puede resolver así:

$$25, 25, 27, 27, 27, \underbrace{27}_{6^{to}}, \underbrace{\quad}_{6{,}25^{\circ}}, \underbrace{30}_{7^{mo}}, 30, 30, 30, 31, 31, 31, 33, 33, 33, 33, 33, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40$$

El término $6{,}25$ se halle justo en el primer cuarto entre el término 6^{to} y 7^{mo}, es decir, el primer cuartil se halla justo en el primer cuarto entre 27 y 30, es decir: $Q_1 = 27 + \frac{30-27}{4} = 27{,}75$

47. (D)

a) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{2 \cdot 25 + 4 \cdot 27 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 31 + 5 \cdot 33 + 7 \cdot 40}{25} = 32,64$ años

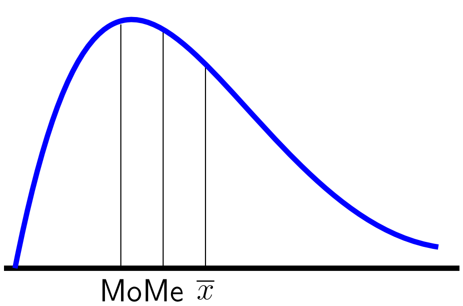
b) La moda corresponde al dato de mayor frecuencia, es decir $Mo = 40$

48. (B)

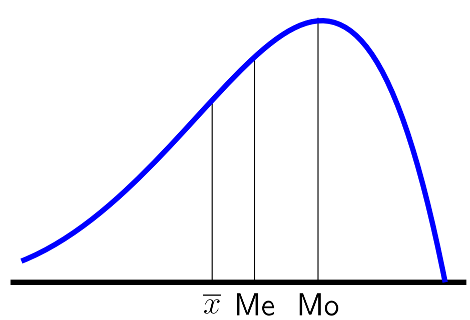
a) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{45+55+57+64+69+75+75+78+79+81+83+89}{12} = 70{,}8\overline{3}$

b) La asimetría es positiva si $Mo \leq Me \leq \overline{x}$, veamos: $Mo = 75$ (dato que más repite o de mayor frecuencia), $Me = 75$ (dato número 6 de los 12 datos ordenados de menor a mayor), $\overline{x} = 70{,}8\overline{3}$, luego no hay asimetría positiva

Recuerde que:



Asimetría positiva



Asimetría negativa

49. (C)

   a) $Mo = Me = 75$ (ver solución del ejercicio anterior)

   b) La nota máxima fue un 89

50. (C) Calculemos la posición relativa del dato: $P_r = \dfrac{\text{Dato-Media aritmética}}{\text{Desviación estándar}}$

   a) Para el primer trimestre: $P_r = \dfrac{90{,}9 - 86{,}5}{9{,}18} \approx 0{,}48$

   b) Repitiendo para el segundo trimestre, $P_r = \dfrac{88 - 83{,}3}{8{,}51} \approx 0{,}55$

   Por ello se puede afirmar que la calificación relativa de Juan aumentó en el I examen del segundo trimestre.

51. (C)

   a) Se llama rango intercuartílico a la diferencia entre el tercer y primer cuartil, para el caso que nos ocupa es: $88 - 60 = 28$.

   b) Es claro que al ser la caja izquierda menos ancha que la de la derecha, las notas se hayan menos dispersas entre el $25\,\%$ y el $50\,\%$ que entre el $50\,\%$ y el $75\,\%$.

52. (D) Primero, se tiene que el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si M corresponde al evento que salga un número mayor que 4, entonces $M = \{5, 6\}$, luego $M^C = E - M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{5, 6\} = \{1, 2, 3, 4\}$

53. (D) El evento $A \cup B$ consiste en que salga un número par o bien que salga un número primo, es decir, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

54. (C) Dos eventos son mútuamente excluyente si al darse uno esto imposibilita que se de el otro.

   a) Es claro que un producto está en buen estado o no lo está, una condición excluye a la otra.

   b) Un estudiante podría llamarse Caldo y tener apellido Maggi, de esta forma podría ser seleccionado entre los que tienen la letra "C" como primera letra de su nombre, pero esto no excluye que sea seleccionado entre los que tienen apellido con letra "M" como inicial.

55. (D) $P(\text{no llover}) = 1 - P(\text{llover}) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$

56. (D) Consideremos el espacio muestral, se encierra en un círculo cada vez que la suma de los valores sea menor que 12, con lo cual solo hay una posibilidad de las 36 de que suceda el evento complementario, luego $P(Suma \geq 12) = \dfrac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

57. (D)

   a) $P(\text{blanco}) = \dfrac{8}{5+7+8} = \dfrac{8}{20} = 0{,}40$

   b) $P(\text{rojo}) = \dfrac{5}{5+7+8} = \dfrac{5}{20} = 0{,}25$

58. (A) Sea H : hombre y B : bronquitis
   $P(H \cap B) = \dfrac{4}{50} = 0{,}08$

59. (A) Sea M : mujer y A : asma
   $P(M \cap A) = \dfrac{15}{50} = 0{,}30$

60. (D) Sea H : hombre , A : asma , M : mujer y G : gripe.

   a) $P(M \cup G) = P(M) + P(G) - P(M \cap G) = \dfrac{29}{50} + \dfrac{18}{50} - \dfrac{8}{50} = 0{,}78$

   b) $P(H \cup A) = P(H) + P(A) - P(H \cap A) = \dfrac{21}{50} + \dfrac{22}{50} - \dfrac{7}{50} = 0{,}72$

Profesor: Álvaro Elizondo Montoya