Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

TERCER EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

Miércoles 3 de setiembre de 2014

INSTRUCCIONES

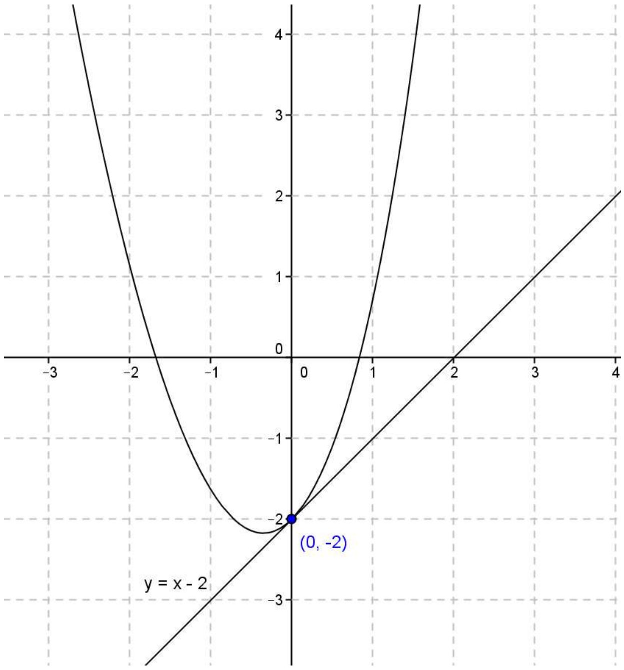
- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **Este examen es de desarrollo, por lo que debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de 6 ítems y un total de 50 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

Nombre completo del estudiante: ____

Nombre del colegio: ____

Código del estudiante: ________________

1. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la siguiente gráfica, así como la recta tangente a ella en el punto de coordenadas $(0,-2)$:



Si se sabe que para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple que $f''(x)=e^x+2$, determine $f(x)$.

2. Calcule las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int\frac{5e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

b. $\displaystyle\int\frac{\left(2-x^2\right)^2}{2x}-\frac{4}{1-cos^2 x}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^{2\pi}|sen\,x|\,dx$

d. $\displaystyle\int\frac{2x}{arcsen^3\left(x^2\right)\sqrt{1-x^4}}\,dx$

3. Calcule, usando la definición de integral definida mediante sumas de Riemann, el valor de $\int_{-2}^{1}\left(x^2-2x+3\right)dx$.

4. Demuestre, utilizando integrales, que el área del triángulo cuyos vértices son el origen del sistema de coordenadas y los puntos donde la recta de ecuación $y=mx+b$ interseca a los ejes, con $m<0<b$ es igual a $A=-\frac{b^2}{2m}$.

5. Haga un bosquejo del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por las curvas determinadas por las ecuaciones $y=x$ y $y=x^2$ en torno a la recta de ecuación $y=-1$, en la cual se resalte una sección transversal. Utilice integrales para calcular su volumen.

6. Verifique que la función $F:]2,+\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $F(x)=\int_{x+2}^{2x}\frac{1}{t}dt$ no tiene números críticos.

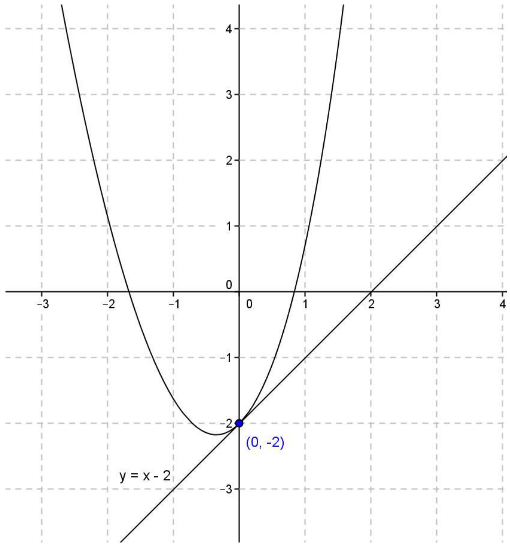
TERCER EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

Miércoles 3 de setiembre de 2014

SOLUCIÓN

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente gráfica, así como la recta tangente a ella en el punto $(0,-2)$:



Si se sabe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f''(x) = e^x + 2$, determine $f(x)$.

Solución

Como $f''(x) = e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = e^x + 2x + A \Rightarrow f(x) = e^x + x^2 + Ax + B$

Además, se sabe que $f(0) = -2$ y $f'(0) = 1$ por lo que

$$\begin{aligned} & f'(0) = 1 + A = 1 \wedge f(0) = 1 + B = -2 \\ & \Rightarrow A = 0 \wedge B = -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) = e^x + x^2 - 3$.

2. Calcule las siguientes integrales:

a. $\int \frac{5e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

b. $\int \frac{\left(2-x^2\right)^2}{2x}-\frac{4}{1-cos^2 x}\,dx$

c. $\int_0^{2\pi} |sen\, x|\,dx$

d. $\int \frac{2x}{arcsen^3\left(x^2\right)\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Solución

a. $$\int \frac{5e^x}{1+e^{2x}}\,dx = 5\int \frac{e^x}{1+\left(e^x\right)^2}\,dx = 5\int \frac{1}{1+u^2}\,du = 5\,arctan\,u + C = 5\,arctan\left(e^x\right)+C$$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

b. $$\int \frac{\left(2-x^2\right)^2}{2x}-\frac{4}{1\text{-}cos^2(x)}dx = \int \frac{4-4x^2+x^4}{2x}-\frac{4}{sen^2(x)}dx = \int\left[2\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{2}x^3-4csc^2(x)\right]dx$$

$$= 2\,ln|x| - x^2 + \frac{1}{8}x^4 + 4\,cot(x) + C$$

c. $$\int_0^{2\pi}|sen\,x|\,dx = \int_0^{\pi}|sen\,x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}|sen\,x|\,dx = \int_0^{\pi} sen\,x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} sen\,x\,dx =$$

$$-cos\,x\Big|_0^{\pi} + cos\,x\Big|_{\pi}^{2\pi} = (1+1)+(1+1) = 4$$

d.

$$\int \frac{2x}{arcsen^3\left(x^2\right)\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int\left(arcsen\left(x^2\right)\right)^{-3}\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\,2x\,dx$$

$$u = arcsen\left(x^2\right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\,2x\,dx$$

$$\int u^{-3}du = \frac{u^{-2}}{-2}+C = -\frac{1}{2\left(arcsen\left(x^2\right)\right)^2}+C$$

3. Calcule, usando la definición de integral definida mediante sumas de Riemann, el valor de $\int_{-2}^{1}\left(x^2-2x+3\right)dx$.

Solución

Se tiene que $f\left(x\right)=x^2-2x+3$, $a=-2$, $b=1$, $\Delta x=\dfrac{3}{n}$, $x_i=-2+\dfrac{3i}{n}$

$$f\left(x_i\right)=\left(-2+\frac{3i}{n}\right)^2-2\left(-2+\frac{3i}{n}\right)+3$$
$$=4-\frac{12i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}+4-\frac{6i}{n}+3$$
$$=11-\frac{18i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}$$

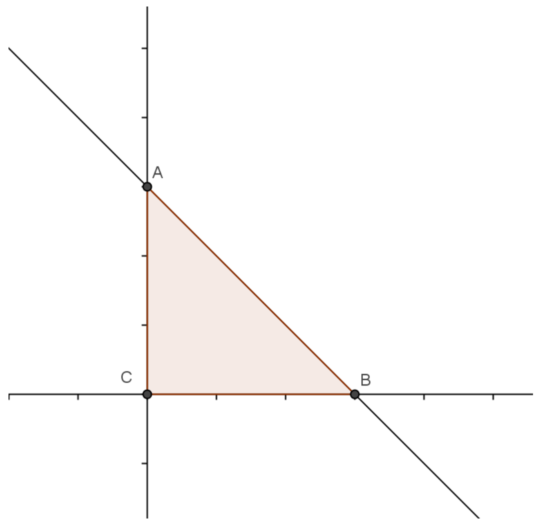
$$\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(11-\frac{18i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{33}{n}-\frac{54i}{n^2}+\frac{27i^2}{n^3}\right)$$
$$=\frac{33}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{33}{n}n-\frac{54}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}+\frac{27}{n^3}\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$
$$=33-\frac{27\left(n+1\right)}{n}+\frac{9\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{2n^2}$$

$$\int_{-2}^{1}\left(x^2-2x+3\right)dx=\lim_{n\to\infty}\left[33-\frac{27\left(n+1\right)}{n}+\frac{9\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{2n^2}\right]=33-27+9=15$$

4. Demuestre, utilizando integrales, que el área del triángulo cuyos vértices son el origen del sistema de coordenadas y los puntos donde la recta de ecuación $y = mx + b$ interseca a los ejes, con $m < 0 < b$ es igual a $A = -\frac{b^2}{2m}$.

Solución

En la siguiente figura considere los puntos $A(0,b)$, $B\left(-\frac{b}{m},0\right)$ y $C(0,0)$.



Por estar ubicada en el primer cuadrante, el área de la región triangular está dada por

$$A = \int_0^{-\frac{b}{m}} (mx+b)\,dx = \left.\frac{mx^2}{2} + bx\right|_0^{-\frac{b}{m}} = \frac{m}{2}\left(-\frac{b}{m}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{m}\right) = \frac{b^2}{2m} - \frac{b^2}{m} = -\frac{b^2}{2m}$$

5. Haga un bosquejo del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por las curvas determinadas por las ecuaciones $y = x$ y $y = x^2$ en torno a la recta de ecuación $y = -1$. Utilice integrales para calcular su volumen.

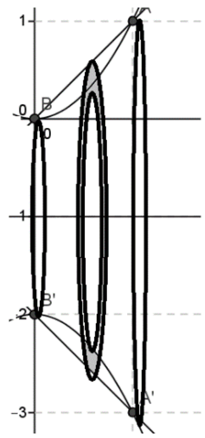
Solución

Los puntos de intersección de las curvas son $(0,0)$ y $(1,1)$ que se obtienen al resolver la ecuación $x = x^2$

La sección transversal es una corona circular cuyos radios (mayor y menor) están dados:

$R = x + 1$ y $r = x^2 + 1$. El área de la sección transversal está dada por

$A = \pi\left[\left(x^2+1\right)^2 - (x+1)^2\right] = \pi\left[x^4 + 2x^2 + 1 - \left(x^2 + 2x + 1\right)\right] = \pi\left(x^4 + x^2 - 2x\right)$ para $0 \le x \le 1$



Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución generado es:

$V=-\pi\int_0^1\left(x^4+x^2-2x\right)dx=-\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_0^1=-\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{7}{15}\pi$ unidades de volumen.

6. Verifique que la función $F:\left]2,+\infty\right[\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $F(x)=\int_{x+2}^{2x}\frac{1}{t}dt$ no tiene números críticos.

$$F(x)=\int_{x+2}^{2x}\frac{1}{t}dt=\int_a^{2x}\frac{1}{t}dt-\int_a^{2+x}\frac{1}{t}dt\Rightarrow$$

$$F'(x)=2\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x(x+2)}$$

Como $F'(x)$ nunca es igual a cero ni se indefine para $x>2$, entonces la función *F* no tiene números críticos.