Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

TERCER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO

Miércoles 4 de setiembre de 2013

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado, éste no se calificará.**
- **Este examen es de desarrollo, por lo que deberá ser resuelto en el cuaderno de examen, y debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de seis (6) ítems y un total de 50 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

1. Determine el criterio de la función f sabiendo que : $f''(x)=2e^x-6x-6$, la gráfica de f posee una recta tangente horizontal en $x=0$ y que la gráfica de f interseca al eje y en $(0,-1)$. (6 puntos)

Solución:

Como $f''(x)=2e^x-6x-6 \Rightarrow \int f''(x)\,dx=\int(2e^x-6x-6)\,dx \Rightarrow$

$f'(x)=2e^x-6\dfrac{x^2}{2}-6x+C_1$. De la primera condición inicial se tiene que

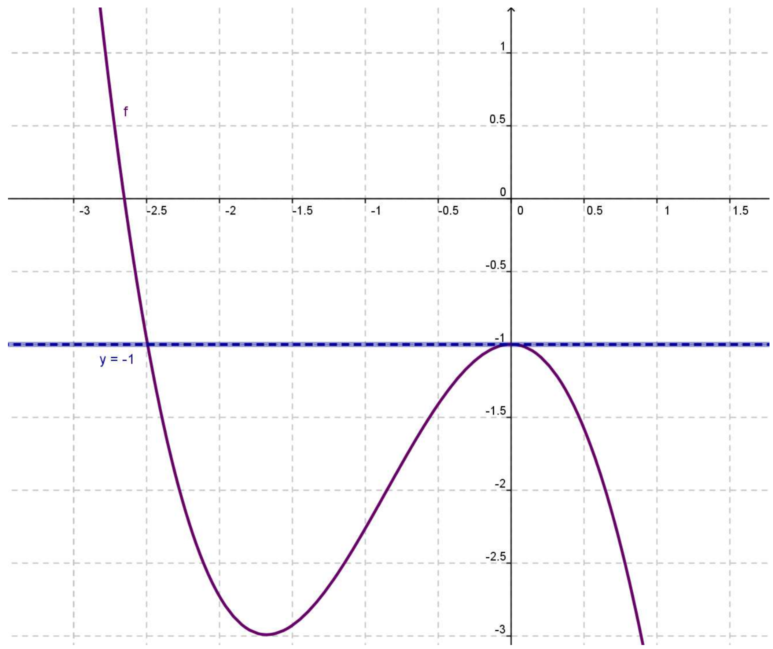
$f'(0)=0,$ entonces $2e^0-6\cdot\dfrac{0^2}{2}-6\cdot 0+C_1=0 \Rightarrow -2=C_1$. Luego

$$f'(x)=2e^x-6\frac{x^2}{2}-6x-2 \Rightarrow \int f'(x)\,dx=\int\left(2e^x-6\frac{x^2}{2}-6x-2\right)dx \Rightarrow$$

$f(x)=2e^x-3\dfrac{x^3}{3}-6\dfrac{x^2}{2}-2x+C_2=2e^x-x^3-3x^2-2x+C_2$. De la segunda condición inicial se tiene

$f(0)=-1 \Rightarrow 2e^0-0^3-3\cdot 0^2-2\cdot 0+C_2=-1 \Rightarrow C_2=-3$. Por tanto

$$f(x) = 2e^x - x^3 - 3x^2 - 2x - 3$$



2. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\int_{-2}^{3} \left(2x - |x-1|\right) dx$ (5 puntos)

$$\int_{-2}^{3} \left(2x - |x-1|\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2x - -(x-1)\right) dx + \int_{1}^{3} \left(2x - (x-1)\right) dx =$$

$$\int_{-2}^{1} (2x + x - 1)\, dx + \int_{1}^{3} (2x - x + 1)\, dx = \int_{-2}^{1} (3x-1)\, dx + \int_{1}^{3} (x+1)\, dx =$$

$$\int_{-2}^{1} (3x-1)\, dx + \int_{1}^{3} (x+1)\, dx = \left(\frac{3x^2}{2} - x\right)_{-2}^{1} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{1}^{3} =$$

$$\left[\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{12}{2} + 2\right)\right] + \left[\left(\frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right] = \frac{-3}{2}$$

(b) $\int\left(\dfrac{x^2+3x+1}{\sqrt{x-1}}\right)dx$ (6 puntos)

Sea $x-1=y \Rightarrow x=y+1 \Rightarrow dx=dy$. Luego

$$\int\left(\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x-1}}\right)dx=\int\left[\frac{(y+1)^2+3(y+1)+1}{\sqrt{y}}\right]dy=\int\left[\frac{y^2+2y+1+3y+3+1}{\sqrt{y}}\right]dy=$$

$$\int\left[\frac{y^2+5y+5}{\sqrt{y}}\right]dy=\int\left[\frac{y^2}{\sqrt{y}}+\frac{5y}{\sqrt{y}}+\frac{5}{\sqrt{y}}\right]dy=\int\left[y^{\frac{3}{2}}+5y^{\frac{1}{2}}+5y^{\frac{-1}{2}}\right]dy=$$

$$\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+5\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+5\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2(x-1)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{10(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}+10\sqrt{x-1}+C=$$

(c) $\int\left[\operatorname{sen}(\theta)-\operatorname{sen}^3(\theta)\right]d\theta$ (6 puntos)

$$\int\left[\operatorname{sen}(\theta)-\operatorname{sen}^3(\theta)\right]d\theta=\int\left[\operatorname{sen}(\theta)\left(1-\operatorname{sen}^2(\theta)\right)\right]d\theta=\int\left[\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]d\theta\cdot$$

Sea $\cos(\theta)=y \Rightarrow -\operatorname{sen}(\theta)d\theta=dy$. Luego

$$\int\left[\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\right]d\theta=-\int y^2\,dy=-\frac{y^3}{3}+C=-\frac{\cos^3\theta}{3}+C.$$

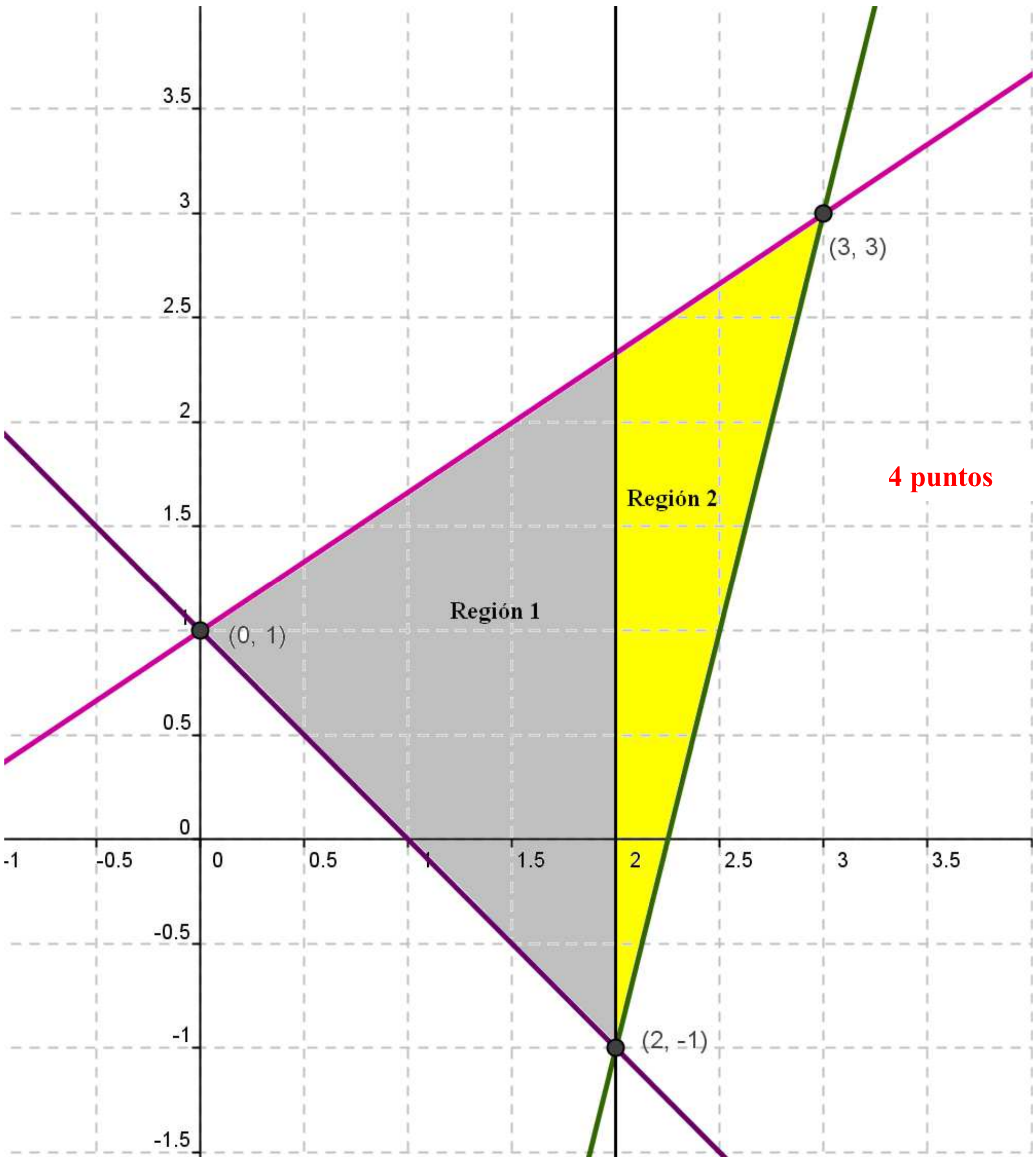
3. **(a)** Construya las gráficas de las rectas $y = -x + 1$, $y = \frac{2}{3}x + 1$ **y** $y = 4x - 9$.

(b) Determine los pares ordenados de los puntos de intersección de las gráficas realizadas en la parte **(a).** Indíquelos en la representación gráfica.

(c) Sombree el área de la región limitada por las rectas.

(d) Utilizando integración calcule el área de la región limitada por las rectas.

(8 puntos)



$$\int_0^2 \left(\frac{2}{3}x + 1 - (-x+1) \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{2}{3}x + 1 - (4x-9) \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(\frac{5}{3}x \right) dx + \int_2^3 \left(-\frac{10}{3}x + 10 \right) dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{6} \right)_0^2 + \left(\frac{-10x^2}{6} + 10x \right)_2^3 = \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = 5$$

El área sombreada es de 5 u.A .

4. Dadas f y h dos funciones continuas $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y derivables en $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tales que $f(x)=\int_0^{h(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\right)dt$ y $h(x)=\int_0^{\cos(x)}\left(1+sen\left(t^2\right)\right)dt$, determine el valor exacto de $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (5 puntos)

Por la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(h(x)\right)^3}}\cdot h'(x), \quad \text{además} \quad h'(x)=\left(1+sen\left(\cos^2(x)\right)\right)\cdot -sen(x).$$

Luego $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3}}\cdot h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donde

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(1+sen\left(t^2\right)\right)dt=\int_0^0\left(1+sen\left(t^2\right)\right)dt=0 \text{ y}$$

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\text{sen}\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\cdot -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\text{sen}\left(0\right)\right)\cdot -1=-1.$$ Por lo tanto

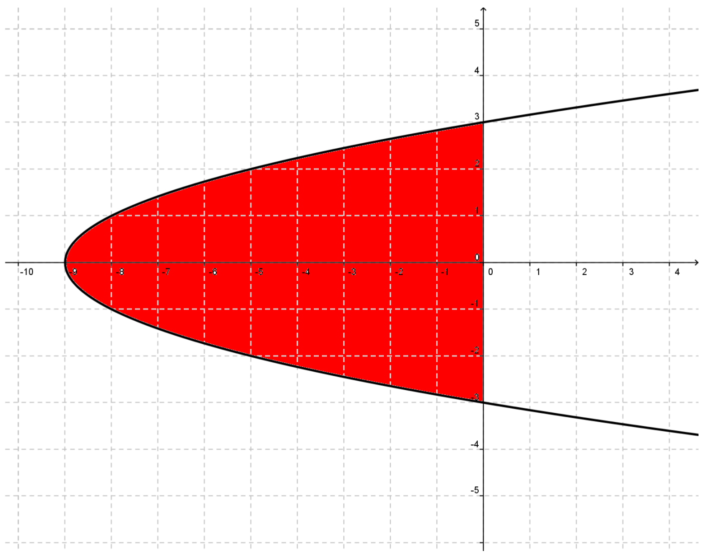
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+(0)^3}}\cdot -1=-1.$$

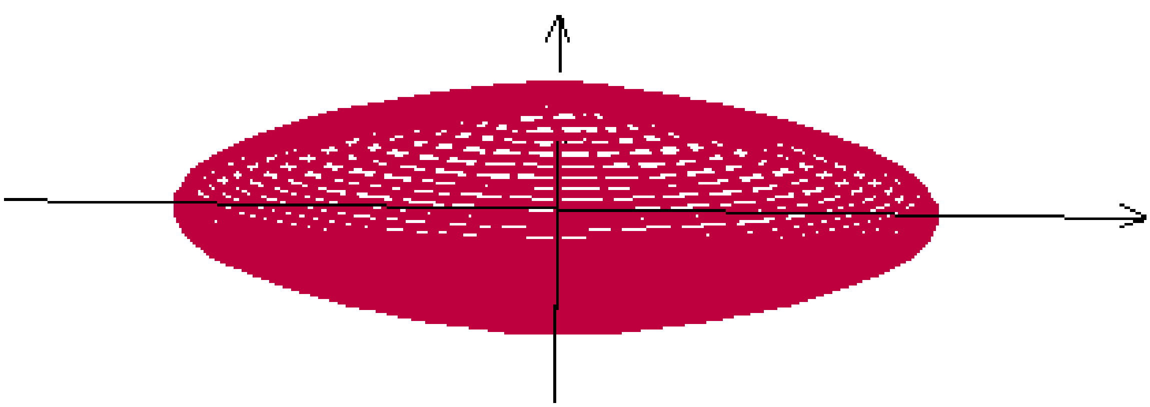
5. **(a)** Dibuje la región limitada por la gráfica de la curva $x+9=y^2$ y el eje y.

(b) Realice un esbozo del sólido que se genera al hacer girar la región anterior en torno al eje y.

(c) Calcule el volumen del sólido.

(6 puntos)





$$\int_{-3}^{3}\left(y^2-9\right)^2\pi\,dy=\int_{-3}^{3}\left(y^4-18y^2+91\right)\pi\,dy=\pi\left(\frac{y^5}{5}-\frac{18y^3}{3}+91y\right)_{-3}^{3}=\frac{1296}{5}\pi$$

6. Utilice sumas de Riemann para calcular $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-3x\right)dx$. (8 puntos)

$$\int_{-1}^{2}\left(2x^2-3x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2-(-1)}{n}\cdot\left[2\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2-3\left(-1+\frac{3i}{n}\right)\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left[2\left(1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right)+3-\frac{9i}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left[2-\frac{12i}{n}+\frac{18i^2}{n^2}+3-\frac{9i}{n}\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left(5-\frac{21i}{n}+\frac{18i^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n}{n}-\frac{63}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{54}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(15-\frac{63}{n^2}\cdot\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}+\frac{54}{n^3}\cdot\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right)=15-\frac{63}{2}+54\cdot\frac{2}{6}=\frac{3}{2}$$

-fin-