*Universidad de Costa Rica*
*Escuela de Matemática*
*Proyecto MATEM 2011*

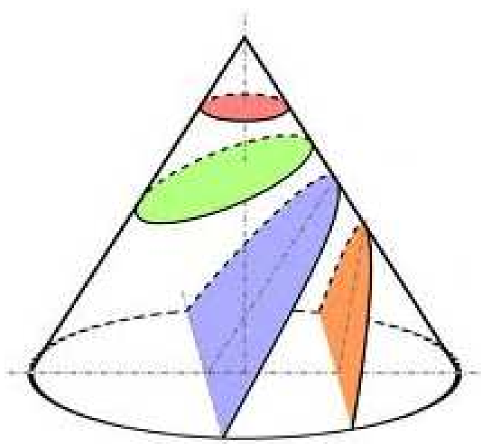
**http://matem.emate.ucr.ac.cr/**
tel. (506) 2511-4528

# MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
## -Décimo Año-

## III EXAMEN PARCIAL 2011

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ______________________________________________



**Fórmula**

**1**

Sábado 8 de octubre

# INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (35 puntos) y la segunda es de desarrollo (15 puntos).

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 35 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2^x$. Considere las siguientes afirmaciones:

   I. $f$ es una función biyectiva.

   II. $f$ es una función creciente.

   De ellas son verdaderas

(A) Sólo la I.

(B) Sólo la II.

(C) Ambas.

(D) Ninguna.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=e^{x+2}+3$. La gráfica de *f* es asintótica a la recta de ecuación

(A) $x=-2$

(B) $y=-2$

(C) $x=3$

(D) $y=3$

3. Para la función $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ si el ámbito es $\left]\frac{8}{27},\frac{9}{4}\right]$, entonces el conjunto A corresponde a

(A) $[-3,2[$

(B) $]-2,3]$

(C) $]-3,2]$

(D) $[-2,3[$

4. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=b^{x-b}$. Si $g(1)=\sqrt{b}$ entonces $g$ es una función

(A) creciente

(B) constante

(C) decreciente

(D) sobreyectiva

5. ¿Cuál de las siguientes funciones es creciente?

(A) $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ f(x)=-\log(x)$

(B) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{7}{9}\right)^{-x}$

(C) $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_{\frac{3}{4}}(x)$

(D) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(0,5)^{x}$

6. Considere la función biyectiva $f:\mathbb{R}\to]2,+\infty[$ definida por $f(x)=3^{x-7}+2$. La inversa de $f$ es la función $f^{-1}:]2,+\infty[\to\mathbb{R}$ cuyo criterio es

(A) $f^{-1}(x)=\log_3(x+5)$

(B) $f^{-1}(x)=\log_3(x+9)$

(C) $f^{-1}(x)=\log_3(x-2)+7$

(D) $f^{-1}(x)=\log_3(x+2)-7$

7. El ámbito de la función $f$ definida por $f:]0,81[\to\mathbb{R},\ f(x)=-\log_{\frac{1}{3}}(9x)$ es

(A) $]-\infty,6[$

(B) $]6,+\infty[$

(C) $]-\infty,-6[$

(D) $]-6,+\infty[$

8. Considere los siguientes números reales:

I. $\log_{0,3}(2011)$

II. $\log_7 \sqrt{3}$

De ellos, son positivos

(A) Sólo el I.

(B) Sólo el II.

(C) Ambos.

(D) Ninguno.

**Para resolver los ítems 9, 10 y 11 puede utilizar que:**

$\ln 2 \approx 0,6931$ $\quad$ $\ln 3 \approx 1,0986$ $\quad$ $\ln 5 \approx 1,6094$

9. El número $\ln(216)$ es aproximadamente

(A) 1,7917

(B) 3,1779

(C) 3,9889

(D) 5,3751

10. El número $\log_3 \sqrt[3]{2}$ es aproximadamente

(A) 4,7552

(B) 0,2103

(C) 0,5283

(D) 1,8927

11. La solución de la ecuación $2^x - 3^{5x-1} = 0$ es aproximadamente

(A) 0,23

(B) 4,36

(C) -0,17

(D) -0,11

12. La expresión $\frac{1}{6}\left(\log_b a^2 - 4\log_b \sqrt{m}\right)$ es equivalente a

(A) $\log_b a^3m^3$

(B) $\log_b \sqrt{a^3m^3}$

(C) $\log_b \sqrt[3]{\frac{a}{m}}$

(D) $\log_b \sqrt[3]{am}$

13. La expresión $\log_3 108 + \log\left(\ 0{,}00001\right) - \log_3 4$ es igual a

(A) $2$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{-1}{2}$

(D) $-2$

14. El conjunto solución de la ecuación $2 \cdot 7^x + 7^{x+1} = 3087$ es un número real

(A) entre uno y cuatro

(B) entre cuatro y seis

(C) mayor que seis

(D) menor que uno

15. El conjunto solución de la ecuación $2^{x^2} \cdot\ 5^{x^2} = 0,001 \cdot \left(10^{3-x}\right)^2$ es igual a

(A) $\{1\}$

(B) $\{-3\}$

(C) $\{1,-3\}$

(D) $\{3,-1\}$

16. La solución de la ecuación $\log_2\left[\log\left(2x-1\right)\right]=1$ es un número real entre

(A) 10 y 30

(B) 30 y 50

(C) 50 y 70

(D) 70 y 90

17. La solución de la ecuación $\log_3 x + 2 = \log_3 5$ es

(A) 3

(B) $-4$

(C) $\dfrac{5}{2}$

(D) $\dfrac{5}{9}$

18. La solución de la ecuación $\log\left(x-4\right)-\log\left(3x-10\right)=\log\left(\dfrac{1}{x}\right)$ es un número real

(A) entre $\dfrac{9}{2}$ y 7

(B) entre 3 y $\dfrac{9}{2}$

(C) menor que 3

(D) mayor que 7

19. El conjunto solución de la inecuación $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-x} \geq \dfrac{1}{4}$ es

(A) $\left[3,+\infty\right[$

(B) $\left]-\infty,3\right]$

(C) $\left[-3,+\infty\right[$

(D) $\left]-\infty,-3\right]$

20. El conjunto solución de la inecuación $\log_{0,4}(3x-6) > \log_{0,4}(12+x)$ es

(A) $]-\infty, 9[$

(B) $]9, +\infty[$

(C) $]2, 9[$

(D) $]0, 9[$

21. El conjunto solución de la inecuación $\log(5x+20) \leq 1$ es

(A) $\varnothing$

(B) $]-4, -2]$

(C) $[-2, +\infty[$

(D) $]-\infty, -2]$

22. El conjunto solución de $\log_{0,5} x > -4$ corresponde a

(A) $]-\infty, -4[$

(B) $]-\infty, 16[$

(C) $]-4, 0[$

(D) $]0, 16[$

23. Si el área de un triángulo equilátero es $9\sqrt{3}dm^2$ entonces el radio de la circunferencia circunscrita mide

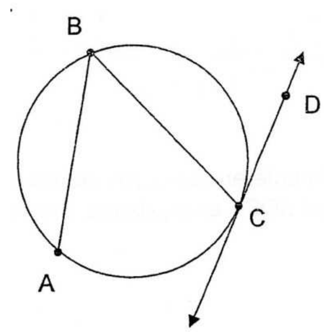
(A) $\sqrt{3}\ dm$

(B) $2\sqrt{3}\ dm$

(C) $3\sqrt{3}\ dm$

(D) $6\sqrt{3}\ dm$

24. Considere la siguiente figura.




Si $\overleftrightarrow{CD}$ es tangente a la circunferencia en C, $AB = BC$ y $m\angle BCD = 52^\circ$, entonces $m\angle ABC$ es

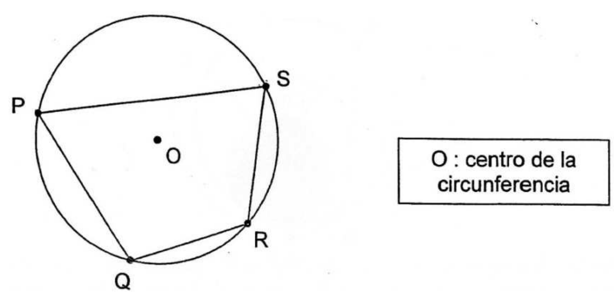
(A) 38°

(B) 52°

(C) 64°

(D) 76°

25. Considere la siguiente figura.




Considere las siguientes dos proposiciones.

I. $m\angle PSR + m\angle PQR = 180°$

II. $m\angle SPQ = m\angle PQR$

De ellas, con certeza, ¿cuáles son **verdaderas**?

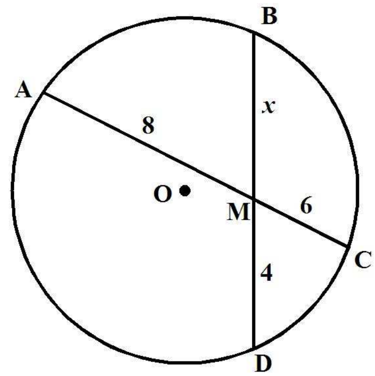
(A) Ambas.

(B) Ninguna.

(C) Sólo la I.

(D) Sólo la II.

26. En la figura, O es el centro de la circunferencia. $\overline{DB}$ y $\overline{CA}$ son cuerdas de la circunferencia y se intersecan en M. La medida de $\overline{DB}$ es igual a




(A) 12

(B) 16

(C) 48

(D) 52

27. En una circunferencia, una cuerda mide 6 cm y la distancia del centro a dicha cuerda es $\frac{5}{3}$ cm. Entonces, la longitud de dicha circunferencia es aproximadamente

(A) 21,55 cm

(B) 39,11 cm

(C) 15,65 cm

(D) 26,32 cm

28. Si la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono regular es 2880º, entonces cada ángulo central mide

(A) 18º

(B) 20º

(C) 22º

(D) 24º

29. Si en un polígono regular cada ángulo central mide 18° entonces desde cada vértice se puede trazar la siguiente cantidad de diagonales

(A) 17

(B) 18

(C) 170

(D) 340

30. Considere dos circunferencias concéntricas que determinan una corona circular de 2 cm de ancho y $20\pi$ cm$^2$ de área. El radio de la circunferencia menor mide, en cm

(A) 6

(B) 4

(C) 3

(D) 2

31. El perímetro de un triángulo equilátero cuya apotema mide 5 *cm* es

(A) $40\sqrt{2}\ cm$

(B) $30\sqrt{3}\ cm$

(C) $30\sqrt{2}\ cm$

(D) $60\sqrt{3}\ cm$

32. Si la altura de un cono mide 8 *cm* y la circunferencia de la base mide $12\pi cm$ entonces el área lateral del cono es

(A) $30\pi\ cm^2$

(B) $36\pi\ cm^2$

(C) $60\pi\ cm^2$

(D) $96\pi\ cm^2$

33. En un recipiente con forma de cilindro circular recto cuya profundidad es 12 dm, se tiene que $150\pi$ dm$^3$ de líquido ocupan la mitad de su capacidad. Por lo tanto, la cantidad de material utilizado en la construcción de este recipiente sin tapa fue

(A) $25\pi$ dm$^2$

(B) $50\pi$ dm$^2$

(C) $109{,}85\pi$ dm$^2$

(D) $145\,\pi$ dm$^2$

34. Si el área de una esfera es $576\pi \; cm^2$ entonces su volumen, en $cm^3$, es

(A) $718{,}12\pi$

(B) $2304\pi$

(C) $256\pi$

(D) $192\pi$

35. El volumen de un prisma recto, cuya base es un hexágono regular de lado 12cm y cuya altura mide 15cm, es

(A) $216\sqrt{3}$ cm$^3$

(B) $1080\sqrt{3}$ cm$^3$

(C) $1828{,}25\sqrt{3}$ cm$^3$

(D) $3240\sqrt{3}$ cm$^3$

*Fin de la primera parte*

*Universidad de Costa Rica*
*Escuela de Matemática*
*Proyecto MATEM 2011*

**http://matem.emate.ucr.ac.cr/**
tel. (506) 2511-4528

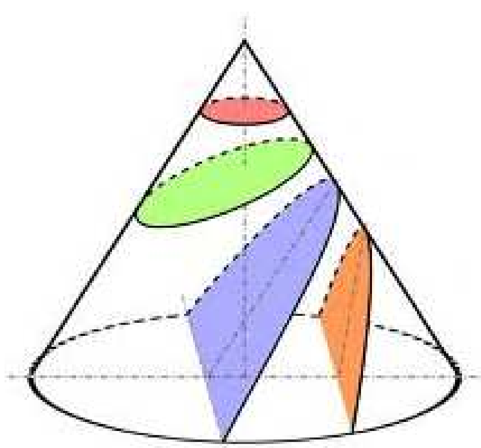
MATEM
Matemática para la Enseñanza Media

# TERCER EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 8 de Octubre

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: __________

COLEGIO: ____________________________________________________________

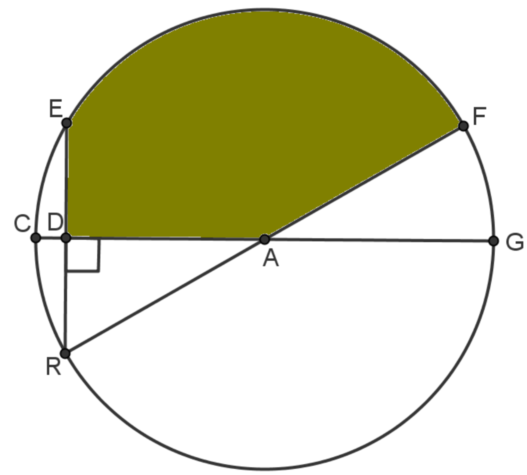
| PREGUNTA | Puntos obtenidos |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |



## SEGUNDA PARTE. DESARROLLO **(Valor 15 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) En la figura, $A$ es el centro de la circunferencia, $m\sphericalangle CAR = 30^\circ$ y el radio de la circunferencia mide $6\,cm$. Determine de manera exacta, el área de la región sombreada.



2. (5 puntos) Si $x > 2$, verifique, utilizando las propiedades de los logaritmos, que

$$\frac{\ln\left(x^4-5x^2+4\right)-\ln\left(x-2\right)-\ln\left(x+1\right)}{\ln\left(125\right)-2\ln\left(5\right)}=\log_5\left(x^2+x-2\right)$$

3. (5 puntos) Considere la siguiente información:

*Si $D_0$ es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y su entorno, y si su entorno tiene una temperatura $T_S$, entonces la temperatura T del objeto al tiempo t está dada por* $T(t) = T_S + D_0 e^{-kt}$ *; donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto.*

Utilizando la información anterior y las siguientes aproximaciones, resuelva el **problema planteado a continuación**:

| $x$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | 0,6931 | 1,0986 | 1,6094 | 1,9459 | 2,3979 | 2,5649 |

Una taza de café tiene una temperatura de 200° F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70° F. Después de 10 minutos, la temperatura del café es de 150° F.

a. Determine una fórmula para encontrar la temperatura del café en el tiempo *t*.
b. ¿En cuánto tiempo aproximadamente se habrá enfriado el café hasta 100° F?

*Universidad de Costa Rica*
*Escuela de Matemática*
*Proyecto MATEM 2011*

**http://matem.emate.ucr.ac.cr/**
tel. (506) 2511-4528

# SOLUCIONARIO

TERCER EXAMEN PARCIAL 2011 - Sábado 8 de octubre

## Selección única

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | | 8 | B | | 15 | C | | 22 | D | | 29 | A | |
| 2 | D | | 9 | D | | 16 | C | | 23 | B | | 30 | B | |
| 3 | C | | 10 | B | | 17 | D | | 24 | D | | 31 | B | |
| 4 | C | | 11 | A | | 18 | A | | 25 | C | | 32 | C | |
| 5 | B | | 12 | C | | 19 | A | | 26 | B | | 33 | D | |
| 6 | C | | 13 | D | | 20 | C | | 27 | A | | 34 | B | |
| 7 | A | | 14 | A | | 21 | B | | 28 | B | | 35 | D | |

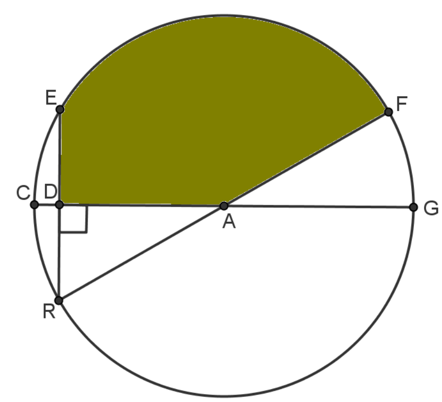
## Desarrollo

1. (5 puntos) En la figura, $A$ es el centro de la circunferencia, $m\measuredangle CAR = 30^\circ$ y el radio de la circunferencia mide $6\ cm$. Determine de manera exacta, el área de la región sombreada.

**Solución**:

Área de la región sombreada = Área del $\Delta EDA$ + área del sector circular $EAF$

Área de la región sombreada = $\dfrac{9\sqrt{3}}{2} + 12\pi$




Notas:

**a) Área del $\Delta EDA$**

Se traza $\overline{EA}$.

$\Delta RDA \cong \Delta EDA$ (LAL: $\overline{AD} \cong \overline{AD}$, $\measuredangle RDA \cong \measuredangle EDA$ y $\overline{RD} \cong \overline{DE}$ )

$\Rightarrow \Delta EDA$ es un triángulo 30º-60º-90º con hipotenusa $\overline{AE}$.

Como $AE = 6$ dado que $\overline{AE}$ es un radio de la circunferencia, se tiene que $DE = 3$ y $AD = 3\sqrt{3}$.

Entonces:

Área del $\Delta EDA$ $= \dfrac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

**b) Área del sector circular** *EAF*

Como $m\sphericalangle CAR = 30^\circ$, $m\sphericalangle FAG = 30^\circ$ ($\sphericalangle CAR$ y $\sphericalangle FAG$ son ángulos opuestos por el vértice). Entonces $m\sphericalangle EAF = 120^\circ$. Como el radio de la circunferencia mide 6 se tiene que:

Área del sector circular $EAF = \dfrac{\pi\cdot 6^2\cdot 120^\circ}{360^\circ} = 12\pi$

2. (5 puntos) Si $x > 2$, verifique, utilizando las propiedades de los logaritmos, que

$$\frac{\ln\left(x^4-5x^2+4\right)-\ln\left(x-2\right)-\ln\left(x+1\right)}{\ln\left(125\right)-2\ln\left(5\right)} = \log_5\left(x^2+x-2\right)$$

**Solución**:

$$\frac{\ln\left(x^4-5x^2+4\right)-\ln\left(x-2\right)-\ln\left(x+1\right)}{\ln\left(125\right)-2\ln\left(5\right)} = \frac{\ln\left[\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)\right]-\ln\left(x-2\right)-\ln\left(x+1\right)}{\ln\left(125\right)-\ln\left(5^2\right)}$$

$$= \frac{\ln\left[\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)\right]-\left[\ln\left(x-2\right)+\ln\left(x+1\right)\right]}{\ln\left(125\right)-\ln\left(5^2\right)} = \frac{\ln\left[\dfrac{\left(x+2\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}\right]}{\ln\left(\dfrac{125}{5^2}\right)}$$

$$= \frac{\ln\left[\left(x+2\right)\left(x-1\right)\right]}{\ln\left(3\right)} = \frac{\ln\left(x^2+x-2\right)}{\ln\left(3\right)} = \log_3\left(x^2+x-2\right)$$

3. (5 puntos) Considere la siguiente información:

*Si $D_0$ es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y su entorno, y si su entorno tiene una temperatura $T_S$, entonces la temperatura T del objeto al tiempo t está dada por* $T(t) = T_S + D_0 e^{-kt}$ *; donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto.*

Utilizando la información anterior y las siguientes aproximaciones, resuelva el **problema planteado a continuación**:

| $x$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | 0,6931 | 1,0986 | 1,6094 | 1,9459 | 2,3979 | 2,5649 |

Una taza de café tiene una temperatura de 200° F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70° F. Después de 10 minutos, la temperatura del café es de 150° F.

a. Determine una fórmula para encontrar la temperatura del café en el tiempo *t*.
b. ¿En cuánto tiempo aproximadamente se habrá enfriado el café hasta 100° F?

**Solución**:

a. Determine una fórmula para encontrar la temperatura del café en el tiempo *t*.

De acuerdo con la información presentada en el recuadro se tiene que:

- Temperatura inicial del objeto = 200
- Temperatura del entorno = $T_S = 70$
- $D_0 = 200 - 70 = 130$

Entonces $T(t) = 70 + 130 \cdot e^{-k \cdot t}$

Como $T(10) = 150$

$\Rightarrow 150 = 70 + 130 \cdot e^{-10k}$

$\Rightarrow 80 = 130 \cdot e^{-10k}$

$\Rightarrow e^{-10k} = \dfrac{8}{13}$

$$\Rightarrow -10k = \ln\left(\frac{8}{13}\right)$$

$$\Rightarrow k = \frac{3 \cdot \ln(2) - \ln(13)}{-10}$$

$$\Rightarrow k \approx 0,04856$$

**Respuesta:** Si se considera $k = 0,05$ se tiene que la fórmula para encontrar la temperatura del café en el tiempo $t$ es $T(t) = 70 + 130 \cdot e^{-0,05t}$

b. ¿En cuánto tiempo aproximadamente se habrá enfriado el café hasta 100° F

Se busca $m$ tal que $T(m) = 100$

$$100 = 70 + 130 \cdot e^{-0,05m}$$

$$\Rightarrow 30 = 130 \cdot e^{-0,05m}$$

$$\Rightarrow e^{-0,05m} = \frac{3}{13}$$

$$\Rightarrow -0,05 \cdot m = \ln\left(\frac{3}{13}\right)$$

$$\Rightarrow m = \frac{\ln(3) - \ln(13)}{-0,05}$$

$$\Rightarrow m \approx 29,236$$

**Respuesta:** el café se habrá enfriado hasta 100° F aproximadamente a los 30 minutos.