Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
-Décimo Año-

III EXAMEN PARCIAL 2012

Nombre: ______________________________ código: _______

Colegio: ____

Fórmula

1

Sábado 6 de octubre de 2012

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de desarrollo (20 puntos).

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, deberá rellenar **con lápiz**, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 30 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Si el punto de coordenadas $(b,1)$ pertenece a la gráfica de una función cuyo criterio es $f(x)=\dfrac{3^{3-x}-1}{2}$ entonces el valor de b es

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 4

2. La gráfica de la función definida en su dominio máximo, por $h(x)=\log(4-2x)$ es asintótica a la recta de ecuación

(A) $x=4$
(B) $x=2$
(C) $y=2$
(D) $y=4$

3. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a^x$ y analice las siguientes afirmaciones:

I. Si $a>1$ entonces $f(a)>f(-a)$
II. Si $0<a<1$ entonces $f(a)>f(1)$

De ellas son verdaderas

(A) Solamente II
(B) Solamente I
(C) Ninguna
(D) Ambas

4. Si $g:\left]-1,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ es una función definida por $g(x)=\log_{\sqrt{3}}(x+1)$ entonces $g\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ es igual a

(A) -2
(B) -1
(C) $\dfrac{1}{3}$
(D) $-\dfrac{1}{2}$

5. Considere la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-x^2}$. ¿Cuántas preimágenes tiene $\dfrac{9}{4}$?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

6. El ámbito de la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $h(x)=-5^x-2$ es

(A) $\mathbb{R}$
(B) $\left]0,+\infty\right[$
(C) $\left]-\infty,-2\right[$
(D) $\left]-2,+\infty\right[$

7. Si se sabe que $\ln(25)\approx 3,22$ entonces $\ln\left(\dfrac{1}{5e}\right)$ es aproximadamente

(A) 2,61
(B) 0,61
(C) -0,61
(D) -2,61

8. La expresión $\left(\log_{25}10\right)\left(\log\dfrac{1}{5}\right)$ es equivalente a

(A) $\log_{25}2$

(B) $-2\log\ 5$

(C) $-\dfrac{1}{2}$

(D) $\dfrac{1}{2}$

9. La expresión $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 8}$ es igual a

(A) $\sqrt{8}$

(B) $\sqrt{2}$

(C) 4

(D) 8

10. El conjunto solución de la ecuación $25^{2x-2}=125^{4x+2}$ es

(A) $\left\{\dfrac{-5}{4}\right\}$

(B) $\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

(C) $\{2\}$

(D) $\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$

11. La solución de $5^{x-1}=15$ es

(A) 4

(B) $\log_5 16$

(C) $1+\log 15$

(D) $1+\log_5 15$

12. El conjunto solución de $\log_3(2x) - \log_3(x+6) = \log_3(x+1)$ es

(A) $\varnothing$
(B) $\{1\}$
(C) $\{2,3\}$
(D) $\{-2,-3\}$

13. El conjunto solución de $\log_{0,1}(2x-1) > \log_{0,1}(x+1)$ es

(A) $]-\infty, 2[$
(B) $]2, +\infty[$
(C) $]-1, 2[$
(D) $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$

14. Analice las siguientes proposiciones referidas a una circunferencia de centro A que contiene a los puntos B y C:

I. Si $B - A - C$ entonces $BC = AB + AC$
II. Si $BC = 5$ entonces $AB < 5$

De ellas son verdaderas

(A) Solamente II
(B) Solamente I
(C) Ninguna
(D) Ambas

15. A, B, C y D son puntos coplanares tales que C es un punto de la circunferencia de centro A, y D es un punto de la circunferencia de centro B. Si BA= 9cm, AC = 7 cm y BD = 4cm, entonces se puede asegurar que las circunferencias son

(A) secantes
(B) tangentes interiores
(C) tangentes exteriores
(D) mutuamente exteriores

16. Considere una circunferencia de centro R que contiene a los puntos A, B y C. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de $\overline{CB}$, analice las siguientes proposiciones:

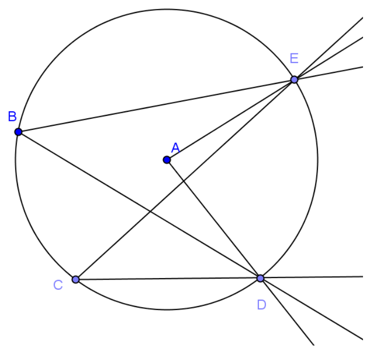
I. Si RN = RM entonces AB = CB
II. Si $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ entonces A – R – C

De ellas son verdaderas

(A) Solamente II
(B) Solamente I
(C) Ninguna
(D) Ambas

17. En la figura B, C, D y E son puntos de la circunferencia de centro A. Analice las siguientes proposiciones:

I. $2m\angle A = m\angle C$
II. $m\angle CDB = m\angle BEC$

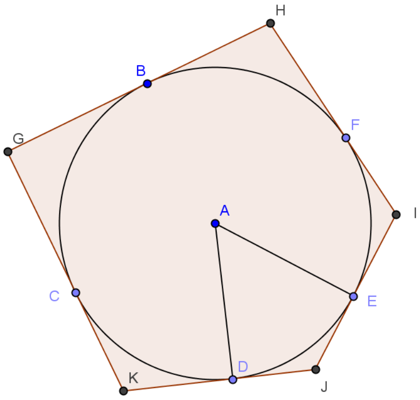


De ellas son verdaderas

(A) Solamente II
(B) Solamente I
(C) Ninguna
(D) Ambas

18. En la figura GHIJK es un pentágono circunscrito en la circunferencia de centro A y 21cm de radio. Si CK = 15 cm y KJ = 27 cm entonces el perímetro del cuadrilátero $\square ADJE$ es

(A) 84 cm
(B) 66 cm
(C) 48 cm
(D) 45 cm

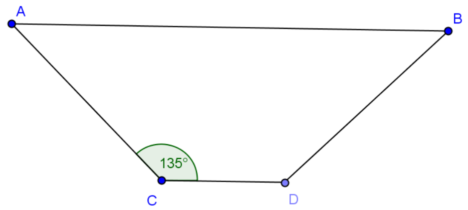


19. Considere el punto P en el exterior de la circunferencia de centro A tal que $\overleftrightarrow{PT}$ es tangente en T a la circunferencia y Q es el punto donde $\overline{AP}$ interseca a la circunferencia. Si AT = 5 cm y PQ = 8 cm entonces PT es igual a

(A) 13 cm
(B) 12 cm
(C) $\sqrt{89}$ cm
(D) $\sqrt{194}$ cm

20. En la figura el trapecio es isósceles $CD = 4\sqrt{5}$ cm y $AC = 5\sqrt{10}$ cm. El área del cuadrilátero es

(A) $45\,cm^2$
(B) $175\,cm^2$
(C) $225\,cm^2$
(D) $45\sqrt{5}\,cm^2$



21. En un polígono el número total de diagonales que se puede trazar es 4 menos que el triple del número de lados, entonces este polígono se clasifica como

(A) pentágono
(B) hexágono
(C) heptágono
(D) octágono

22. Dos circunferencias concéntricas de $\frac{5\pi}{2}\,cm$ y $\frac{11\pi}{2}\,cm$ de longitud determinan una corona circular cuyo ancho mide

(A) 3 cm
(B) $\frac{3}{2}\,cm$
(C) $\frac{3}{4}\,cm$
(D) $\frac{3\pi}{2}\,cm$

23. Si el área de un círculo es $81\pi\ cm^2$, entonces la longitud de un arco que subtiende un ángulo inscrito de 20° es

(A) $\dfrac{\pi}{2}\ cm$
(B) $\pi\ cm$
(C) $2\pi\ cm$
(D) $4\pi\ cm$

24. En un polígono regular desde cada vértice se pueden trazar 7 diagonales. La medida de cada ángulo interno de este polígono es

(A) 140°
(B) 144°
(C) 40°
(D) 36°

25. En un hexágono regular el perímetro es 54 cm. La medida, en centímetros, del radio de la circunferencia circunscrita a ese polígono es

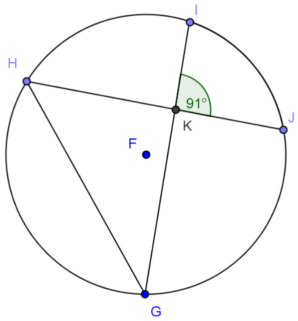
(A) 9
(B) 4,5
(C) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$
(D) $3\sqrt{3}$

26. La altura de un triángulo equilátero mide 36 cm, entonces la apotema de este triángulo mide

(A) 24 cm
(B) 18 cm
(C) 12 cm
(D) $12\sqrt{3}$ cm

27. En la figura $\widehat{IJ}$ mide 32° menos que $\widehat{GH}$. ¿Cuál es la medida de $\widehat{IJ}$?

(A) 59°
(B) 75°
(C) 91°
(D) 107°



28. El diámetro de la circunferencia inscrita a un triángulo equilátero mide 12 cm. El perímetro de este polígono es

(A) 54 cm
(B) $12\sqrt{3}$ cm
(C) $18\sqrt{3}$ cm
(D) $36\sqrt{3}$ cm

29. En un cono circular recto la altura y el radio están en la razón 3 : 4. Si el área de la base es $144\pi\ cm^2$ entonces la generatriz mide

(A) 9 cm
(B) 12 cm
(C) 15 cm
(D) 20 cm

30. La base de un prisma recto de base hexagonal regular tiene un área de $24\sqrt{3}\ cm^2$. Si la altura del prisma es 8 cm entonces su área lateral es

(A) 32 cm^2
(B) 192 cm^2
(C) $24\sqrt{6}\ cm^2$
(D) $\left(186+48\sqrt{3}\right) cm^2$

Fin de la primera parte

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

TERCER EXAMEN PARCIAL 2012 - Sábado 6 de octubre

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: __________

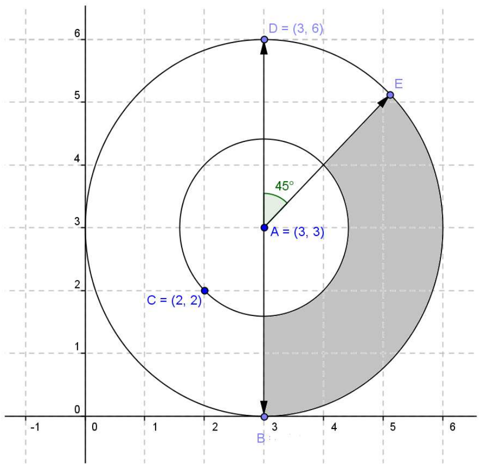
COLEGIO: ____

Pregunta	1	2	3	4	Total
Puntos Obtenidos					

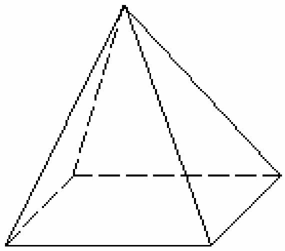
SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. De acuerdo con los datos de la figura, en la cual A es el centro de ambas circunferencias, determine el área de la región sombreada. (5 puntos)



2. Determine el perímetro de una cara lateral de una pirámide recta cuya base es un cuadrado de $96\,cm^2$ de área, si se sabe que la altura mide la mitad de la arista lateral. (5 puntos).



3. Cierto tipo de bacterias crece de acuerdo con el modelo de crecimiento $A = A_0 e^{0,375t}$ donde t se mide en horas. Si una colonia de estas bacterias inicia con 400 bacterias, ¿cuántas habrá después de 8 horas? ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse la población? (5 puntos).

$\ln 2 \approx 0,69 \qquad \ln 3 \approx 1,09$

4. Considere la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida en su dominio máximo por $f(x) = \ln(e - x) - \ln(x + 1)$. Determine el dominio máximo, los puntos donde la gráfica interseca a los ejes del sistema de. (5 puntos)

SOLUCIONARIO

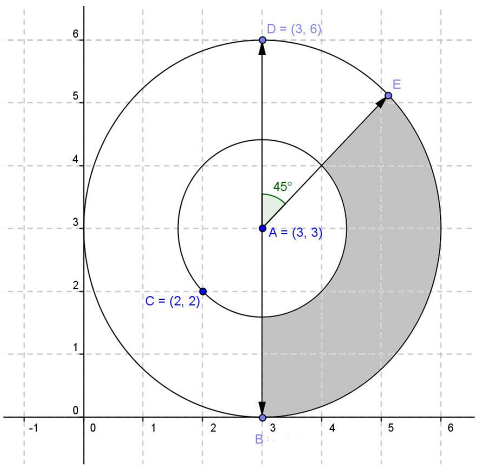
Selección única (Valor 30 puntos)

1	C		8	C		15	A		22	B		29	C
2	B		9	A		16	D		23	C		30	B
3	D		10	A		17	A		24	B			
4	A		11	D		18	B		25	A			
5	C		12	A		19	B		26	C			
6	C		13	D		20	C		27	B			
7	D		14	B		21	D		28	D			

SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. De acuerdo con los datos de la figura, en la cual A es el centro de ambas circunferencias, determine el área de la región sombreada. (5 puntos).



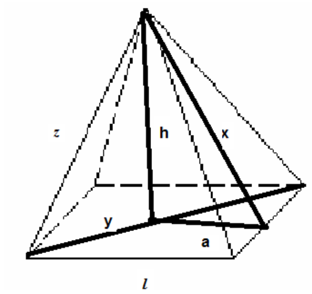
En la circunferencia mayor el radio mide 3 u.l. 1 punto.

En la circunferencia menor el radio mide $\sqrt{2}$ u.l. 1 punto.

El ángulo correspondiente al trapecio circular mide 135°. 1 punto.

El área de la región sombreada es $A=\dfrac{\pi\left(3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)135}{360}=\dfrac{7\cdot 3\pi}{8}=\dfrac{21\pi}{8}(u.l.)^2$. 2 puntos.

2. Determine el perímetro de una cara lateral de una pirámide recta cuya base es un cuadrado de $96\,cm^2$ de área, si se sabe que la altura mide la mitad de la arista lateral. (5 puntos).



De acuerdo con la información brindada y con los datos de la figura:

$l^2 = 96 \Rightarrow l = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ 1 punto.

$y = \dfrac{l\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ 1 punto.

$y = \dfrac{z}{2}\sqrt{3} \Rightarrow 4\sqrt{3} = \dfrac{z}{2}\sqrt{3} \Rightarrow z = 8$ 2 puntos.

Perímetro: $\left(16 + 4\sqrt{6}\right)cm$ 1 punto.

3. Cierto tipo de bacterias crece de acuerdo con el modelo de crecimiento $A = A_0 e^{0,375t}$ donde t se mide en horas. Si una colonia de estas bacterias inicia con 400 bacterias, ¿cuántas habrá después de 8 horas? ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse la población?
5 puntos.

$\ln 2 \approx 0,69 \qquad \ln 3 \approx 1,09$

Como $A_0 = 400$ entonces $A = 400e^{0,375t}$. Si $t = 8$ entonces $A = 400e^{0,375 \cdot 8} = 400e^3 \approx 400(2,72)^3 = 8049,4592$. Por lo tanto, después de 8 horas habría alrededor de 8049 bacterias. 2 puntos.

Para que la población se triplique debe suceder que $3 = e^{0,375t} \Leftrightarrow \ln 3 = 0,375t \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 3}{0,375} \approx \dfrac{1,09}{0,375} \approx 2,9$. Por lo tanto, deben transcurrir cerca de 2,9 horas. 3 puntos.

4. Considere la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida en su dominio máximo por $f(x) = \ln(e - x) - \ln(x+1)$. Determine el dominio máximo, los puntos donde la gráfica interseca a los ejes del sistema de coordenadas. 5 puntos.

a. Como $\ln(e-x) - \ln(x+1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e - x > 0 \wedge x+1 > 0 \Leftrightarrow x < e \wedge x > -1 \Leftrightarrow x \in \left]-1, e\right[$ entonces $D = \left]-1, e\right[$. 2 puntos.

b. $f(0) = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$ entonces la gráfica de f interseca al eje Y en el punto $(0,1)$. 1 punto.

c. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e-x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow e - x = x + 1 \Leftrightarrow e - 1 = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{e-1}{2}$ entonces la gráfica de f interseca al eje X en el punto $\left(\dfrac{e-1}{2}, 0\right)$. 2 puntos.