EMat Escuela de Matemática

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

PROYECTO MATEM

TERCER EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

4 DE SETIEMBRE 2019

MATEM Matemática para la Enseñanza Media

SOLUCIÓN

1. $\boxed{\text{6 puntos}}$ Aplique las propiedades de la integral para resolver los siguientes ejercicios.

   a) $\boxed{\text{3 puntos}}$ Escriba la siguiente expresión como una sola integral:

$$\int_2^{10} f(x)dx - \int_2^7 f(x)dx$$

Solución

Como $\displaystyle\int_2^{10} f(x)dx = \int_2^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx$ entonces:

$$\int_2^{10} f(x)dx - \int_2^7 f(x)dx = \int_2^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx - \int_2^7 f(x)dx = \int_7^{10} f(x)dx$$

   b) $\boxed{\text{3 puntos}}$ Si, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 4$, $\displaystyle\int_0^4 f(t)dt = 7$, $\displaystyle\int_3^4 f(t)dt = 2$, calcule el valor de:

$$\int_1^3 f(t)dt$$

Solución

$7 = \displaystyle\int_0^4 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^3 f(t)dt + \int_3^4 f(t)dt = 4 + \int_1^3 f(t)dt + 2$ por tanto

$\displaystyle\int_1^3 f(t)dt = 7 - 4 - 2 = 1uA$

2. $\boxed{\text{7 puntos}}$ Los puntos $(-1,3)$ y $(0,2)$ están sobre una curva en la que cualquier punto (x,y) de la curva $y = f(x)$, es tal que $f''(x) = 2 - 4x$. Determine el criterio de la curva.

Solución

$f'(x) = \displaystyle\int (2-4x)dx = 2x - 2x^2 + C_1$ 1 pto

$f(x) = \displaystyle\int (2x - 2x^2 + C_1)dx = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C_1x + C_2$ 1 pto

- Como $f(0) = 2$ entonces:
  $2 = f(0) = 0^2 - \frac{2}{3}\cdot 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2$ 1 pto
  $\to C_2 = 2$ 1 pto

- Como $f(-1) = 3$
  $3 = f(-1) = (-1)^2 - \frac{2}{3}\cdot(-1)^3 + C_1\cdot(-1) + C_2 = 1 + \frac{2}{3} - C_1 + 2$ 1 pto
  $\to C_1 = 1 + \frac{2}{3} + 2 - 3 = \frac{2}{3}.$ 1 pto

Entonces $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x + 2$ 1 pto

3. $\boxed{\text{8 puntos}}$ Verifique que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se tiene:

$$f(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}dt \quad \text{es constante.}$$

Solución

Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}dt$ 1 pto

Note que $f'(x) = -2\operatorname{sen} x\cos x \arccos(\sqrt{\cos^2 x}) + 2\operatorname{sen} x\cos x \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{\operatorname{sen}^2 x})$ 2 ptos

Como $\operatorname{sen} x \geq 0$ y $\cos x \geq 0$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entonces
$\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$ y $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x$ 3 ptos

Ahora, $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ y $\arccos(\cos x) = x$, por tanto
$f'(x) = -2\operatorname{sen} x\cos x \cdot x + 2\operatorname{sen} x \cos x \cdot x = 0 \to f$ es constante. 2 ptos

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}dx$ $\boxed{\text{7 puntos}}$

Solución

$\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}dx$ 1 pto

Considere $u = \cos x \to du = -\operatorname{sen} x dx$. Por tanto: 2 ptos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}dx &= -\int \frac{(1-u^2)}{\sqrt{u}}du && \text{1 pto}\\
&= -\int u^{\frac{-1}{2}}du + \int u^{\frac{3}{2}}du && \text{1 pto}\\
&= -2u^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C && \text{1 pto}\\
&= -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C && \text{1 pto}
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ $\boxed{\text{4 puntos}}$

Solución

Sea $u = e^x \to du = e^x dx$. Por tanto: 1 pto

$\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ 1 pto

$= \operatorname{arc\,sen}(u) + C$ 1 pto

$= \operatorname{arc\,sen}(e^x) + C$ 1 pto

c) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx$ $\boxed{\text{5 puntos}}$

Solución

Sea $u = x^3 \to du = 3x^2dx$ entonces: 1 pto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} && \text{1 pto} \\ &= \left[\frac{1}{3}\arctan(u)\right]_{-1}^{1} && \text{1 pto} \\ &= \frac{1}{3}\arctan(1) - \frac{1}{3}\arctan(-1) && \text{1 pto} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} && \text{1 pto} \end{aligned}$$

d) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\boxed{\text{9 puntos}}$

Solución

Sea $u = 1+\sqrt{x} \to u-1 = \sqrt{x}$ 1 pto

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \to dx = 2(u-1)du$ 2 ptos

Cambio de Variables 1 pto
Si $x = 4 \to u = 3$
Si $x = 0 \to u = 1$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int_{1}^{3} \frac{2(u-1)du}{u} && \text{1 pto} \\ &= 2\int_{1}^{3}\left(1-\frac{1}{u}\right)du && \text{1 pto} \\ &= [2(u-\ln u)]_1^3 && \text{1 pto} \\ &= 2\left((3-\ln 3)-(1-\ln 1)\right) && \text{1 pto} \\ &= 4-2\ln 3 && \text{1 pto} \end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{12 puntos}}$ Determine el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$, $y = -x$, $y = x + 6$, para $y \geq 0$.

Solución

Resolver ecuaciones 3 ptos

$$\begin{aligned} -x &= x + 6 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^3 &= x + 6 \\ x^3 - x - 6 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^3 &= -x \\ x^3 + x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Análisis de $f(x) > g(x)$ 1 pto

$A(x) = \int_{-3}^{0} ((x + 6) - (-x))\, dx + \int_{0}^{2} \left((x + 6) - x^3\right) dx$ 1 pto

Resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \int_{-3}^{0} ((x + 6) - (-x))\, dx && \text{1 pto} \\ &= \int_{-3}^{0} (2x + 6) dx && \text{1 pto} \\ &= \left[x^2 + 6x\right]_{-3}^{0} && \text{1 pto} \\ &= (0^2 + 6(0)) - ((-3)^2 + 6(-3)) = 9uA && \text{1 pto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \int_{0}^{2} \left((x + 6) - x^3\right) dx && \text{1 pto} \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 2 + 12 - 4 - 0 = 10uA && \text{1 pto} \end{aligned}$$

$A(x) = A_1(x) + A_2(x) = 9 + 10 = 19uA$ 1 pto